

# Méth. Mat. Phys. - Chapitre 7

## Transformations de Fourier



7.1 Transformations intégrales

7.2 Transformations de Fourier 1D

7.3 Transformations de Fourier 3D

7.4 Dérivées de transformées de Fourier

7.5 Oscillateur harmonique amorti forcé

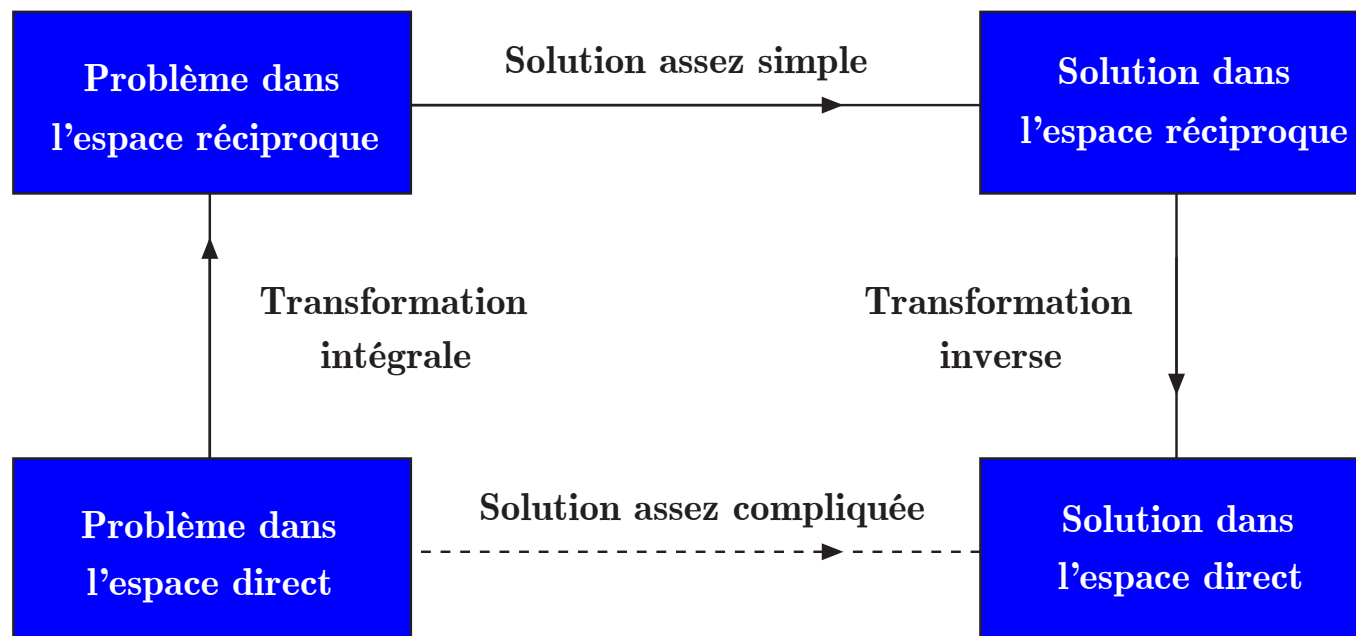
7.6 Oscillateur harmonique amorti forcé périodiquement

- Transformation intégrale : 1D : opérateur lin.  $\mathcal{L} : f(x) \mapsto g(k)$

$$g(k) = \mathcal{L} f(x) = \int_a^b f(x) K(x, k) dx \quad (7.1)$$

- Transformation intégrale : 3D : opérateur lin.  $\mathcal{L} : f(\mathbf{r}) \mapsto g(\mathbf{k})$

$$g(\mathbf{k}) = \mathcal{L} f(\mathbf{r}) = \iiint_{D \subset \mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) K(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d^3 r \quad (7.2)$$



1 Transformation de Laplace : noyaux : 1D

$$K(t, s) = e^{-st} \quad (7.4)$$

(7.3)

2 Transformation de Fourier : noyaux : 1D et 3D

$$K(t, \omega) = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \quad K(x, k) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad K(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}} \quad (7.6)$$

(7.5)

$$dx \quad (7.7)$$

(7.9)

- Transformation de Fourier inverse : 1D - espace

$$(7.12)$$

- **Bijektivité** : transformation de Fourier

$$(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}) f(x) = f(x) \quad (7.11)$$

- **Conséquence** : distribution de Dirac

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}) f(x) &= \mathcal{F}^{-1} \tilde{f}(k) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \right) e^{ikx} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk \right) dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x-x') dx' = f(x) \end{aligned} \quad (7.13)$$

- **Distribution de Dirac : 1D - espace**

$$(7.14)$$

- 1 **Paire :**

$$\delta(x - x') = \delta(x' - x) \quad (7.15)$$

- 2 **Réelle :**

$$\delta^*(x - x') = \delta(x - x') \quad (7.16)$$

- **Transformée de Fourier : distribution de Dirac**

$$\mathcal{F} \delta(x - x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ikx'}}{\sqrt{2\pi}} \quad (7.17)$$

- **Transformée de Fourier inverse : exponentielle à argument imaginaire**

$$\mathcal{F}^{-1} e^{-ikx'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \sqrt{2\pi} \delta(x - x') \quad (7.18)$$

- **Transformation de Fourier inverse** : 1D - temps - signe opposé

$$(7.20)$$

- **Distribution de Dirac** : 1D - temps

$$(7.22)$$

- **Transformée de Fourier** : distribution de Dirac

$$\mathcal{F} \delta(t - t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') e^{i\omega t} dt = \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}} \quad (7.25)$$

- **Transformée de Fourier inverse** : exponentielle à argument imaginaire

$$\mathcal{F}^{-1} e^{i\omega t'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega = \sqrt{2\pi} \delta(t - t') \quad (7.26)$$

- Transformation de Fourier inverse : 3D - espace

$$(7.28)$$

- **Bijektivité** : transformation de Fourier

$$(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}) f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad (7.27)$$

- **Conséquence** : distribution de Dirac

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}) f(\mathbf{r}) &= \mathcal{F}^{-1} \tilde{f}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3 r' \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} \left( \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3 r' \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 k \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3 k \right) d^3 r' \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r' = f(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (7.29)$$

- **Distribution de Dirac : 3D - espace**

(7.30)

- 1 **Paire :**

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (7.31)$$

- 2 **Réelle :**

$$\delta^{3*}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (7.32)$$

- **Transformée de Fourier : distribution de Dirac**

$$\mathcal{F} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r = \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{(2\pi)^{3/2}} \quad (7.33)$$

- **Transformée de Fourier inverse : exponentielle à argument imaginaire**

$$\mathcal{F}^{-1} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3k = (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (7.34)$$

- Dérivées spatiales : 1D

$$\frac{df}{dx}(x) = \quad (7.35)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) (x) = \quad (7.36)$$

- Dérivées temporelles : 1D

$$\frac{df}{dt}(t) = \quad (7.37)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2}(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dt} \right) (t) = \quad (7.38)$$

- Gradient et Laplacien : 3D

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \tag{7.39}$$

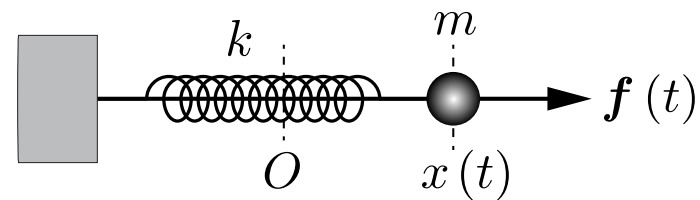
$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \nabla f(\mathbf{r}) = \tag{7.40}$$

- **Oscillateur harmonique forcé :**

- masse :  $m$

- pulsation :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- amortissement :  $\gamma = \frac{b}{2m}$



- **Equation du mouvement :** déformation  $x(t)$

$$(7.42)$$

- **Opérateur linéaire :**

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \quad \text{ainsi} \quad \mathcal{L} x(t) = f(t) \quad (7.45)$$

- **Force ponctuelle :** au temps  $t = t'$

$$(7.46)$$

- **Equation du mouvement :** force ponctuelle

$$\mathcal{L} x(t) = v_0 \delta(t - t') \quad (7.47)$$

- **Equation de Green :**

$$(7.48)$$

- **Déformation :** force générale  $f(t')$

$$(7.49)$$

- **Démonstration :** déformation force générale

$$\mathcal{L} x(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \mathcal{L} G(t-t') f(t') dt' \quad (7.50)$$

$$= \frac{1}{m} \int_0^t \delta(t-t') f(t') dt' = \frac{1}{m} f(t) \quad \square$$

- **Transformée de Fourier inverse :** fonction de Green

$$(7.51)$$

- **Equation de Green** : (7.52) transf. de Fourier de  $G(t - t')$  et  $\delta(t - t')$

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega$$

- **Equation de Green** : dérivées de transformées de Fourier (7.53)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2) \tilde{G}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} d\omega$$

- **Equation de Green** : espace réciproque

$$(-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2) \tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t'} \quad (7.54)$$

- **Fonction de Green** : espace réciproque

$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega t'}}{\omega^2 + 2i\gamma\omega - \omega_0^2} \quad (7.55)$$

- **Fonction de Green** : espace réciproque

$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega t'}}{(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)} \quad (7.56)$$

- **Fonction de Green** : espace direct

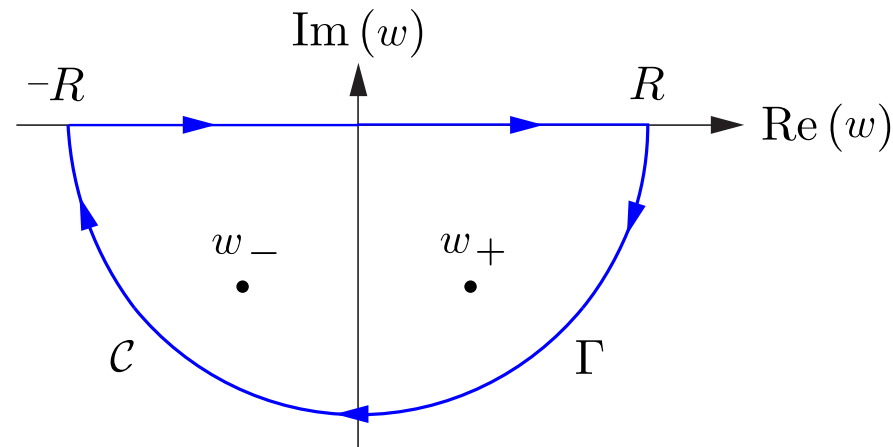
$$(7.58)$$

- **Pôles** : fonction de Green

$$\omega_{\pm} = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (7.57)$$

- **Fonction de Green** : intégrale de contour dans le demi-plan inférieur  
sens horaire :  $\mathcal{C} = [-R, R] \cup \Gamma$  où  $\omega = \text{Re}(w)$

$$(7.60)$$



- **Lemme de Jordan** : intégrale sur l'arc de cercle  $\Gamma \rightarrow 0$  (7.61)

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty} \left| \frac{w \tilde{G}(w) e^{-iwt}}{\sqrt{2\pi}} \right| = \lim_{|w| \rightarrow \infty} \left| \frac{w e^{-i \operatorname{Re}(w)(t-t')} e^{\operatorname{Im}(w)(t-t')}}{2\pi (w - w_+) (w - w_-)} \right| = 0$$

- **Démonstration** : arc de cercle  $\Gamma$  :  $|w| = R$  et  $\operatorname{Im}(w) \leq 0$  (7.62)

$$\begin{aligned} \oint_C \tilde{G}(w) e^{-iwt} dw &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \tilde{G}(w) e^{-iwt} dw + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \tilde{G}(w) e^{-iwt} dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(w) e^{-iwt} dw \end{aligned} \quad (7.63)$$

- Résidus : (7.64)

$$\operatorname{Res}_{w=w_+} \tilde{G}(w) e^{-i\omega t} = \lim_{w \rightarrow w_+} - \frac{(w - w_+) e^{-i\omega(t-t')}}{\sqrt{2\pi} (w - w_+) (w - w_-)} = - \frac{e^{-i\omega_+(t-t')}}{\sqrt{2\pi} (w_+ - w_-)}$$

$$\operatorname{Res}_{w=w_-} \tilde{G}(w) e^{-i\omega t} = \lim_{w \rightarrow w_-} - \frac{(w - w_-) e^{-i\omega(t-t')}}{\sqrt{2\pi} (w - w_+) (w - w_-)} = \frac{e^{-i\omega_-(t-t')}}{\sqrt{2\pi} (w_+ - w_-)}$$

- Théorème des résidus : signe moins : sens horaire

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \tilde{G}(w) e^{-i\omega t} d\omega &= -2\pi i \sum_{\omega=\omega_{\pm}} \operatorname{Res} \tilde{G}(w) e^{-i\omega t} \\ &= \sqrt{2\pi} \left( \frac{e^{-i\omega_-(t-t')} - e^{-i\omega_+(t-t')}}{i(\omega_+ - \omega_-)} \right) \end{aligned} \quad (7.65)$$

- Fonction de Green : (7.60) et (7.65) causale :  $t > t'$

$$(7.66)$$

- **Fonction de Green** : pôles (7.57) dans (7.66)

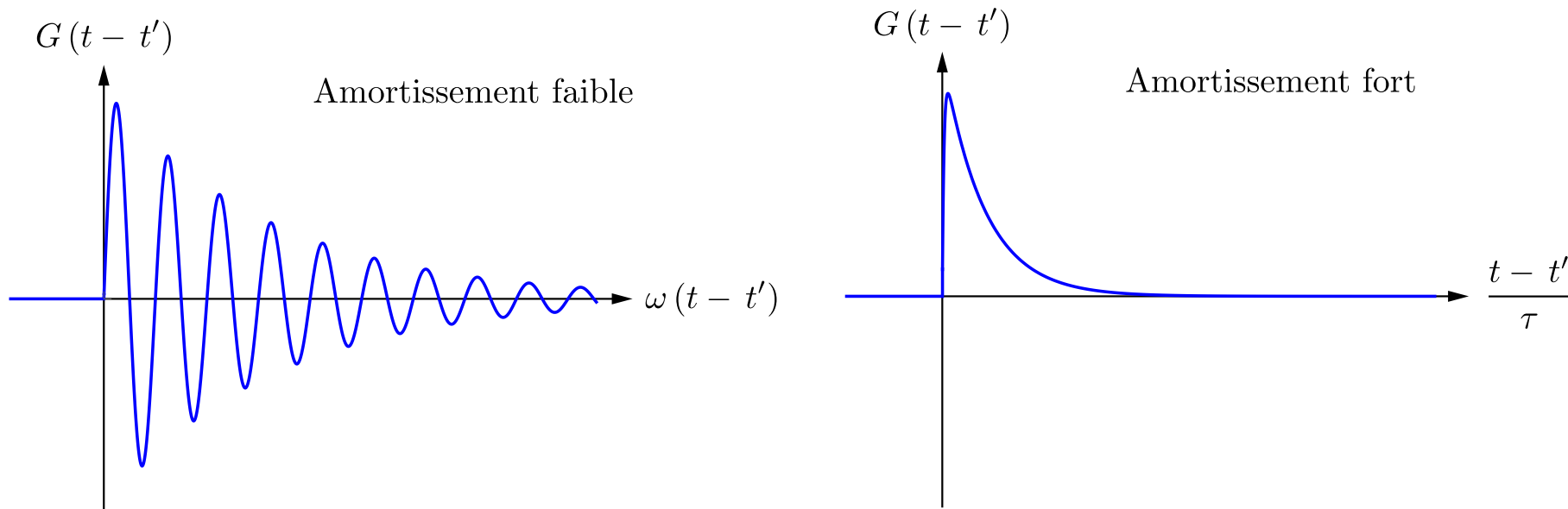
$$G(t - t') = e^{-\gamma(t-t')} \cdot \left( \frac{e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-t')} - e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-t')}}{2i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \right) \Theta(t - t') \quad (7.68)$$

- 1 **Amortissement faible** :  $\omega_0 > \gamma$  ainsi  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  (7.69)

(7.70)

- 2 **Amortissement fort** :  $\omega_0 < \gamma$  ainsi  $\tau = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}^{-1}$  (7.72)

(7.73)



- ① **Déformation** : force générale : amortissement faible

(7.71)

- ② **Déformation** : force générale : amortissement fort

(7.74)

- Force périodique :

(7.75)

- **Déformation** : force périodique : amortissement faible

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{a_0}{\omega} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \left( \frac{e^{i\omega(t-t')} - e^{-i\omega(t-t')}}{2i} \right) \left( \frac{e^{i\omega' t'} - e^{-i\omega' t'}}{2i} \right) dt' \\
 &= -\frac{a_0 e^{-(\gamma-i\omega)t}}{4\omega} \int_0^t \left( e^{(\gamma+i(\omega'-\omega))t'} - e^{(\gamma-i(\omega'+\omega))t'} \right) dt' \\
 &\quad - \frac{a_0 e^{-(\gamma+i\omega)t}}{4\omega} \int_0^t \left( e^{(\gamma-i(\omega'-\omega))t'} - e^{(\gamma+i(\omega'+\omega))t'} \right) dt' \quad (7.76) \\
 &= \frac{a_0}{4\omega} e^{-(\gamma-i\omega)t} \int_0^t \left( e^{(\gamma-i(\omega'+\omega))t'} - e^{(\gamma+i(\omega'-\omega))t'} \right) dt' \\
 &\quad + \frac{a_0}{4\omega} \left( e^{-(\gamma-i\omega)t} \int_0^t \left( e^{(\gamma-i(\omega'+\omega))t'} - e^{(\gamma+i(\omega'-\omega))t'} \right) dt' \right)^*
 \end{aligned}$$

- **Déformation** : force périodique (7.77)

$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega} \operatorname{Re} \left( e^{-(\gamma-i\omega)t} \int_0^t \left( e^{(\gamma-i(\omega'+\omega))t'} - e^{(\gamma+i(\omega'-\omega))t'} \right) dt' \right)$$

- **Intégrale** :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left( e^{(\gamma-i(\omega'+\omega))t'} - e^{(\gamma+i(\omega'-\omega))t'} \right) dt' \\ &= \frac{e^{(\gamma-i(\omega'+\omega))t'}}{\gamma-i(\omega'+\omega)} \Big|_0^t - \frac{e^{(\gamma+i(\omega'-\omega))t'}}{\gamma+i(\omega'-\omega)} \Big|_0^t \\ &= \frac{e^{(\gamma-i(\omega'+\omega))t} - 1}{\gamma-i(\omega'+\omega)} - \frac{e^{(\gamma+i(\omega'-\omega))t} - 1}{\gamma+i(\omega'-\omega)} \end{aligned} \quad (7.78)$$

- **Déformation** : force périodique

$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-i\omega't} - e^{-(\gamma-i\omega)t}}{\gamma-i(\omega'+\omega)} - \frac{e^{i\omega't} - e^{-(\gamma-i\omega)t}}{\gamma+i(\omega'-\omega)} \right) \quad (7.79)$$

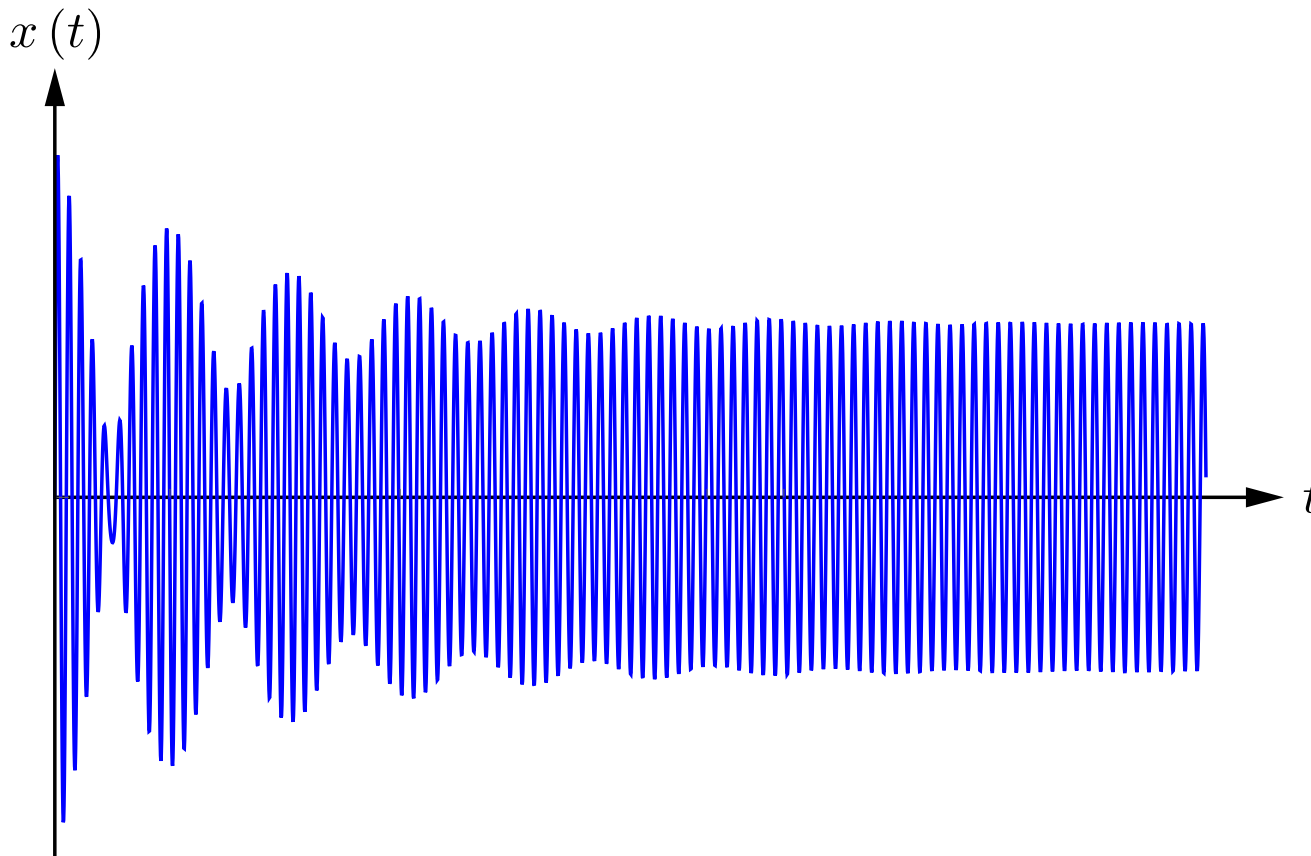
- **Déformation** : force périodique

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{a_0}{2\omega} \operatorname{Re} \left( \frac{(\gamma + i(\omega' + \omega))(e^{-i\omega't} - e^{-(\gamma - i\omega)t})}{(\omega' + \omega)^2 + \gamma^2} \right) \\
 & - \frac{a_0}{2\omega} \operatorname{Re} \left( \frac{(\gamma - i(\omega' - \omega))(e^{i\omega't} - e^{-(\gamma - i\omega)t})}{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2} \right)
 \end{aligned} \tag{7.80}$$

- **Déformation** : proche de la résonance

$$\frac{1}{(\omega' + \omega)^2 + \gamma^2} \ll \frac{1}{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2} \tag{7.81}$$

(7.82)



- 1 **Régime oscillatoire transitoire** :  $t \sim \gamma^{-1}$   
amplitude oscillante exponentiellement amortie
- 2 **Régime oscillatoire stationnaire** :  $t \gg \gamma^{-1}$   
amplitude constante